

**FG Solar- und Anlagentechnik, Uni-Kassel, 13.10.2005**  
(nach Vorlage von Prof. P. Stephan, TU-Darmstadt)

**1. Wärmetransportmechanismen, Wärmedurchgang**

Wärmestrom:  $\dot{Q} = k A (T_1 - T_2) = \frac{(T_1 - T_2)}{R}$   
( $T_1$  Temp. Fluid 1,  $T_2$  Temp. Fluid 2)

mit dem Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  bzw. dem Wärmewiderstand  $R$

- ebene Platte:  $R = \frac{1}{k A} = \frac{1}{\alpha_i A} + \frac{s}{\lambda A} + \frac{1}{\alpha_a A}$

- Zylinderschale:  $R = \frac{1}{k A} = \frac{1}{\alpha_i 2\pi r_i L} + \frac{\ln \frac{r_a}{r_i}}{\lambda 2\pi L} + \frac{1}{\alpha_a 2\pi r_a L}$

- Kugelschale:  $R = \frac{1}{k A} = \frac{1}{\alpha_i 4\pi r_i^2} + \frac{1/r_i - 1/r_a}{\lambda 4\pi} + \frac{1}{\alpha_a 4\pi r_a^2}$

Rippenwirkungsgrad  $\eta_R$ :

$$\frac{1}{kA} = \frac{1}{\alpha_1 A_1} + \frac{s}{\lambda_m A_m} + \frac{1}{\alpha_R (A_G + \eta_R A_R)}$$

mit  $A_G$ : freie Oberfläche des Rohres

$A_R$ : Rippenoberfläche

$\alpha_R$ : Wärmeübergangskoeff. an der Rippe

Rippe mit Rechteckprofil:  $\eta_R = \frac{\tanh(mh)}{mh}$  Kreisrippe:  $\eta_R = \frac{\tanh(mh\phi)}{mh\phi}$

mit:  $m = \sqrt{\frac{2\alpha_R}{\lambda_R \delta_R}}$   $\phi = 1 + 0,35 \ln \left( 1 + \frac{h}{r_o} \right)$

$r_o$ : Außenradius des Rohres

$h$ : Rippenhöhe

**Instationärer Wärmedurchgang**

Ohne Wärmequelle/-senke:

$$\frac{dT_F}{dt} = \frac{kA}{m_F c_F} (T_F - T_U)$$

$$T_F^+ = \frac{T_F - T_U}{T_{F0} - T_U} = \exp \left( - \frac{kA}{m_F c_F} t \right)$$

Mit Wärmequelle/-senke:

mit  $T_F$ : Fluidtemperatur,  $T_U$ : Umgebungsemperatur

$$\frac{dT_F}{dt} + \frac{kA}{m_F c_F} (T_F - T_U) = \frac{\dot{Q}_H}{m_F c_F}$$

$$T_F = T_U + \frac{\dot{Q}_H}{kA} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{t}{t_0} \right) \right] \quad \text{mit} \quad t_0 = \frac{m_F c_F}{kA}$$

$t_0$ : Abklingzeit

**2. Wärmeübertrager / Rekuperatoren**

Massenstrom:  $\dot{m} = \dot{V} \cdot \rho = w \cdot A_q \cdot \rho$

Wärmekapazitätsstrom:  $\dot{C} = c_p \cdot \dot{m}$

mit:  $\dot{V}$ : Volumenstrom;  $w$ : Geschwindigkeit;  $A_q$ : Querschnittsfläche  
 $\rho$ : Dichte,  $c_p$ : spez. Wärmekapazität

Übertragener Wärmestrom:

$$\dot{Q} = k \cdot A_0 \cdot \Delta T_m = \dot{C}_1 \cdot [T_1' - T_1''] = \dot{C}_2 \cdot [T_2' - T_2'']$$

$\Delta T_m$  mittlere Temperaturdifferenz

$\dot{C}_1$  Wärmekapazitätsstrom („schwacher“ Strom)

$\dot{C}_2$  Wärmekapazitätsstrom („starker“ Strom)

' bzw. '' Ein- bzw Austrittsstelle

Dimensionslose Größen:

$$\frac{k A_0}{\dot{C}_1}; \frac{k A_0}{\dot{C}_2} \text{ „NTU“ engl.: number of transfer units}$$

$$\frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \text{ Verhältnis der Wärmekapazitätsströme}$$

$$\phi_1 = \frac{T_1' - T_1''}{T_1' - T_2'}; \phi_2 = \frac{T_2' - T_2''}{T_1' - T_2'} \quad \text{dimensionslose Temp. Strom 1 bzw. Strom 2}$$

$$\phi_2 = \phi_1 \cdot \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}$$

Gleichstromwärmeübertrager:

$$\Delta T_m = \frac{(T_1'' - T_2'') - (T_1' - T_2')}{\ln \frac{T_1'' - T_2''}{T_1' - T_2'}}$$

$$- \frac{k A_0}{\dot{C}_1} \left( 1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \right)$$

$$\phi_{gl} = \phi_1 = \frac{1 - e^{-\frac{\dot{C}_1}{1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}}}}{1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}}$$

Gegenstromwärmeübertrager:

$$\Delta T_m = \frac{(T_1' - T_2'') - (T_1'' - T_2')}{\ln \frac{T_1' - T_2''}{T_1'' - T_2'}}$$

$$- \frac{k A_0}{\dot{C}_1} \left( 1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \right)$$

$$\phi_{gn} = \phi_1 = \frac{1 - e^{-\frac{k A_0}{\dot{C}_1} \left( 1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \right)}}{1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} e^{-\frac{k A_0}{\dot{C}_1} \left( 1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \right)}}$$

Wirkungsgrad:

(bezogen auf den maximalen Wärmestrom  $\dot{Q}_{max}$  im Gegenstromwärmeübertrager bei unendlich großer Fläche  $A_0$ )

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}} = \frac{T_1' - T_1''}{T_1' - T_2'}$$

**3. Wärmeleitung**

Eindimensionale, stationäre Wärmeleitung:  $\dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dx}$

z.B. Wärmestrom durch ebene Platte:  $\dot{Q} = \dot{q} A = \frac{\lambda}{s} A (T_i - T_a)$

Allgemeine Fouriersche Wärmeleitungsgleichung:

$$a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}_q}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

mit der Temperaturleitfähigkeit  $a = \frac{\lambda}{\rho c}$

Sonderfälle: stationär, 1-dim, ohne Wärmequellen und -senken

Wärmeleitung

(Randbedingung:  $T_i$  Temp. an Innenseite,  $T_a$  an Außenseite)

- ebene Platte:

$$T(x) = T_i - \frac{x}{s} (T_i - T_a); \quad \dot{q}(x) = \dot{q} = \frac{\lambda}{s} (T_i - T_a)$$

- Zylinderschale:

$$T(r) = \frac{T_i - T_a}{\ln \frac{r}{r_i}} \ln \frac{r}{r_a} + T_a; \quad \dot{q}(r) = \frac{\lambda}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \frac{1}{r} (T_i - T_a)$$

- Kugelschale:

$$T(r) = T_i - (T_i - T_a) \frac{1 - \frac{r_i}{r}}{1 - \frac{r_i}{r_a}}; \quad \dot{q}(r) = \frac{\lambda}{1/r_i - 1/r_a} \frac{1}{r^2} (T_i - T_a)$$

Sonderfall zweidimensionale, stationäre Wärmeleitung ohne Wärmequelle oder -senke:

$$\dot{Q} = \lambda S_L L (T_2 - T_1)$$

mit dem dimensionslosen, geometrieabhängigen Formfaktor  $S_L$

	Rohr im Erdboden: $S_L = \frac{2\pi}{\operatorname{arccosh}(d/r)}$
	Exzentrische Rohre: $S_L = \frac{2\pi}{\operatorname{arccosh} \frac{r_1^2 + r_2^2 - e^2}{2r_1 r_2}}$
	Rohre im ausgedehnten Medium: $S_L = \frac{2\pi}{\operatorname{arccosh} \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}}$

- Grashof-Zahl:

$$Gr = -\beta (T_w - T_\infty) \frac{g L_0^3}{\nu^2} \triangleq \frac{\text{Auftriebskräfte} \cdot \text{Trägheitskräfte}}{(\text{Reibungskräfte})^2}$$

$$\text{therm. Ausdehnungskoeff. } \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \approx \frac{1}{\rho_w} \cdot \frac{\rho_\infty - \rho_w}{T_w - T_\infty}$$

$$\text{für ideales Gas: } \beta \approx \frac{1}{T_\infty}$$

Index  $w$ : Wert an der Wand

Index  $\infty$ : Wert im Fluid außerhalb Grenzschicht

Fallbeschleunigung  $g = g_x, g_y$  oder  $g_z$  in Koordinatenrichtung

- Raleigh-Zahl:  $Ra = |Gr| \cdot Pr$

### Nußelt-Beziehungen:

$$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} \quad L \text{ charakteristische, problembezogene Länge}$$

Mittlere Temperatur für Stoffwertbestimmung:

$$\text{- über- oder umströmte Körper: } T_m = \frac{T_w + T_\infty}{2}$$

$$\text{- durchströmte Kanäle: } T_m = \frac{T_{\text{ein}} + T_{\text{aus}}}{2}$$

### Erzwungene Konvektion

$$\text{- längsangeströmte, ebene Platte: } Re_L = \frac{w_\infty L}{\nu}$$

$L$  Länge der Anströmung

a) laminare Grenzschichtströmung  
( $Re_L < 10^5$ ;  $0,6 < Pr < 2000$ )

$$Nu_{m,lam} = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$$

b) turbulente Grenzschichtströmung  
( $5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^7$ ;  $0,6 < Pr < 2000$ )

$$Nu_{m,turb} = \frac{0,037 Re_L^{0,8} Pr}{1 + 2,443 Re_L^{-0,1} (Pr^{2/3} - 1)}$$

c) Übergangsbereich  
( $10^5 < Re_L < 5 \cdot 10^5$ ;  $0,6 < Pr < 2000$ )

$$Nu_m = \sqrt{Nu_{m,lam}^2 + Nu_{m,turb}^2}$$

$$\text{- querangeströmter Zylinder: } Re_L = \frac{w_\infty L}{\nu}; \quad L = \frac{\pi}{2} d$$

$d$  Rohrdurchmesser,  $L$  Anströmlänge ( $\frac{1}{2}$  Umfang)

Ablösungen der Grenzschicht tritt schon bei kleinen Re-Zahlen auf, daher gilt allg. für technische Anwendungen:

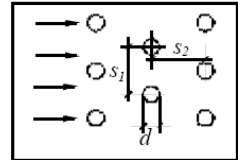
$$Nu_m = 0,3 + \sqrt{Nu_{m,lam}^2 + Nu_{m,turb}^2}$$

$Nu_{m,lam}$  und  $Nu_{m,turb}$  aus Beziehungen für längsangeströmte Platte

$$\text{- querangeströmtes Rohrbündel: } Re_{\psi L} = \frac{w_\infty L}{\psi \nu}; \quad L = \frac{\pi}{2} d$$

$$\text{Querteilungsverhältnis } a = \frac{s_1}{d}$$

$$\text{Längsteilungsverhältnis } b = \frac{s_2}{d}$$



$$\text{Hohlraumanteil } \psi = 1 - \frac{\pi}{4a} = \frac{w_\infty}{w} \quad \text{für } b \geq 1$$

$$\psi = 1 - \frac{\pi}{4ab} \quad \text{für } b < 1$$

a) einzelne Rohrreihe

$$(10 < Re_{\psi L} < 10^6; 0,6 < Pr < 1000)$$

b) fluchtende und versetzte Rohrreihen

$$(10 < Re_{\psi L} < 10^6; 0,6 < Pr < 1000)$$

$$Nu_{m,Bündel} = f_A Nu_{m,Einzelreihe}$$

$$\text{fluchtend: } f_A = 1 + \frac{0,7}{\psi^{1,5}} \cdot \frac{(b/a - 0,3)}{(b/a + 0,7)^2}$$

$$\text{versetzt: } f_A = 1 + \frac{2}{3b}$$

$$\text{- angeströmte Kugel: } Re_L = \frac{w_\infty L}{\nu}; \quad L = d$$

$$(10 < Re_L < 10^7; 0,6 < Pr < 1000)$$

$$Nu_m = 2 + \sqrt{Nu_{m,lam}^2 + Nu_{m,turb}^2}$$

$Nu_{m,lam}$  und  $Nu_{m,turb}$  aus Beziehungen für längsangeströmte Platte

## 4. Konvektiver Wärmetransport

$$\text{Wärmestrom: } \dot{Q} = \alpha A (T_w - T_\infty)$$

( $T_w$  Temp. an Wandoberfläche,  $T_\infty$  Fluidtemp. jenseits der Grenzschicht)

$$\text{mit: } \alpha = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \frac{1}{T_w - T_F}$$

Dimensionslose Kenngrößen:

$$\text{- Reynolds-Zahl: } Re = \frac{w_0 L_0}{\nu} \triangleq \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}}$$

$$\text{- Prandtl-Zahl: } Pr = \frac{\nu}{a} \triangleq \frac{\text{Im pulsaustausch d. Reibung}}{\text{Wärmeaustausch d. W. leitung}}$$

$$Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda}$$

- durchströmtes Rohr/Kanal:

$$Re_L = \frac{w_\infty L}{\nu} = Re_d = \frac{w_\infty d}{\nu}; \quad d = d_h = \frac{4A}{U}$$

A: durchströmte Fläche; U: benetzter Umfang  
 $L_R$ : Rohrlänge

- a) laminare Grenzschichtströmung  
 $(Re_d < 2300; 0,6 < Pr < 1000)$   
 (strömungstechnisch ausgebildet)

a1) konstante Wandtemperatur

$$Nu_{m,lam,a1.1} = \sqrt[3]{3,66^3 + 0,7^3 + \left[1,615 \left(Re_d Pr \frac{d}{L_R}\right)^{1/3} - 0,7\right]^3}$$

a2) konstante Wärmestromdichte

$$Nu_{m,lam,a2.1} = \sqrt[3]{4,364^3 + 0,6^3 + \left[1,953 \left(Re_d Pr \frac{d}{L_R}\right)^{1/3} - 0,6\right]^3}$$

- b) turbulente Grenzschichtströmung  
 $(Re_d > 10^4; 0,6 < Pr < 1000)$   
 ausgebildete Strömung

$$Nu_{m,turb} = \frac{\xi/8 \cdot Re_d Pr}{1 + 12,7 \sqrt{\xi/8} \left(Pr^{2/3} - 1\right)} \left[1 + \left(\frac{d}{L_R}\right)^{2/3}\right]$$

$$\text{mit } \xi = [1,8 \log_{10}(Re_d) - 1,5]^{-2}$$

- c) Übergangsbereich  
 $(2300 < Re_d < 10^4; 0,6 < Pr < 1000)$

$$Nu_m = (1 - \gamma) Nu_{m,lam} + \gamma Nu_{m,turb}$$

$$\text{mit } \gamma = \frac{Re_d - 2300}{10^4 - 2300} \text{ und } 0 < \gamma < 1$$

**Freie Konvektion**

$$Ra = |Gr| Pr$$

- vertikale Platte: Ra und Nu mit  $L = H$  (Plattenhöhe)  
 gebildet

$$(0,1 < Ra < 10^{12}, Pr > 10^{-3})$$

$$Nu_m = \left(0,825 + 0,387 [Ra \cdot f_1]^{1/6}\right)^2$$

$$\text{mit } f_1 = \left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{-16/9}$$

- horizontale Platte: Ra und Nu mit  $L = \frac{A}{U}$  gebildet

A: Heiz-/Kühlfläche; U: Umfang der Fläche

- a) Wärmeabgabe Plattenoberseite oder  
 Kühlung Plattenunterseite

a1) laminare Strömung ( $Ra \cdot f_2 < 7 \cdot 10^4$ )

$$Nu_{m,lam} = 0,766 (Ra \cdot f_2)^{1/5}$$

$$\text{mit } f_2 = \left[1 + \left(\frac{0,322}{Pr}\right)^{1/20}\right]^{-20/11}$$

a2) turbulente Strömung ( $Ra \cdot f_2 > 7 \cdot 10^4$ )

$$Nu_{m,turb} = 0,15 (Ra \cdot f_2)^{1/3}$$

mit  $f_2$  s.o.

- b) Wärmeabgabe Plattenunterseite oder  
 Kühlung Plattenoberseite

b1) laminare Strömung ( $10^3 < Ra \cdot f_1 < 10^{10}$ )

$$Nu_{m,lam} = 0,6 (Ra \cdot f_1)^{1/5}$$

mit  $f_1$  s.o. (vertikale Platte)

b2) turbulente Strömung: Nu-Beziehung unbekannt

**Überlagerung freier und erzwungener Konvektion**

Näherungslösungen:

- Auftrieb und erzwungene Strömung gleichgerichtet

$$Nu_m = \sqrt[3]{Nu_{m,erzwungen}^3 + Nu_{frei}^3}$$

- Auftrieb und erzwungene Strömung entgegengesetzt

$$Nu_m = \sqrt[3]{|Nu_{m,erzwungen}^3 - Nu_{frei}^3|}$$

## 5. Wärmestrahlung

Wärmestrahlung:

$$\dot{q} = \varepsilon(T) \sigma(T) T^4 \quad \text{mit } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4; \quad C_s = 5,67 \text{ W/m}^2\text{K}^4$$

$\varepsilon$ : Emissionsgrad,  $\sigma$ : Stefan – Boltzmann – Konstante

**Wärmeaustausch durch Strahlung zwischen zwei Körpern:**

allgemein:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 A_1 \varphi_{12}}{1 - (1 - \varepsilon_1) \cdot (1 - \varepsilon_2) \varphi_{12} \varphi_{21}} C_s \left[ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right]$$

mit Einstrahlzahlen (Sichtfaktoren)  $\varphi_{12}$  und  $\varphi_{21}$

$$\varphi_{12} A_1 = \varphi_{21} A_2$$

Sonderfälle:

$$\dot{Q}_{12} = C_{12} A_1 \left[ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right], \quad \text{wobei für}$$

- zwei ebene Platten:

$$C_{12} = \frac{C_s}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

- zwei ebene Platten mit  
 N Zwischenwänden (Z):

$$C_{12} = \frac{C_s}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + N \left(\frac{2}{\varepsilon_Z} - 1\right)}$$